

Rendimenti \ Momenti \ 1

Esercizio 1

La volatilità (deviazione standard) dei log-rendimenti del tasso EUR/USD è pari a $4/5$, mentre il suo valore atteso è $-1/3$. Qual è la volatilità del tasso USD/EUR? E il suo valore atteso?

Esercizio 2

Un portafoglio si compone di 3 posizioni su altrettanti asset, secondo i pesi

i	1	2	3
w_i	2	-2	1

I rendimenti semplici sui tre asset sono caratterizzato dai seguenti momenti:

i	1	2	3
$E[R_i]$	-1	0	3

$$Cov \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolare valore atteso e varianza dei rendimenti semplici del portafoglio.

Esercizio 3

Il valore atteso dei log-rendimenti del tasso USD/EUR è pari a $-1/2$, mentre quello del tasso GBP/EUR è pari a 3. Qual è il valore atteso dei log-rendimenti del tasso USD/GBP?

Esercizio 4

Calcolare la volatilità (deviazione standard dei log-rendimenti) del tasso EUR/USD supponendo che la matrice di covarianza dei log-rendimenti sui tassi EUR/GBP e GBP/USD sia la seguente:

$$Cov \begin{bmatrix} r_{EUR/GBP} \\ r_{GBP/USD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/100 & -1/200 \\ -1/200 & 2/100 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5

Il portafoglio P si compone di due posizioni, rispettivamente sugli asset A_1 e A_2 , ed è rappresentabile attraverso i pesi:

i	1	2
w_i	5	-4

Nella base currency dell'investitore, il portafoglio vale 87.

Per gli asset A_1 e A_2 si ipotizzino rendimenti semplici normali, caratterizzati dai seguenti momenti:

i	1	2
$E[R_i]$	1	-2

$$Cov \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h-t)/100 & -(h-t)/200 \\ -(h-t)/200 & 2(h-t)/100 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quanto segue.

1. Il valore atteso dei rendimenti semplici di portafoglio.
2. Varianza e volatilità (deviazione standard) dei rendimenti semplici di portafoglio.
3. La correlazione tra R_1 e R_2 e la covarianza tra $-R_1$ e $3R_2$.
4. La probabilità che il portafoglio renda negativamente per $h = t + 101$.
5. Il VaR di P al tempo t per $h = t + 597$ e $\alpha = .05$, base currency dell'investitore.

Esercizio 6

Il portafoglio P è detenuto da un investitore GBP e si compone di una posizione lunga su due asset di tipo A_1 ed una posizione lunga su tre asset di tipo A_2 , ciascuno dei quali genera, rispettivamente, un unico flusso di cassa, secondo le seguenti specifiche: $A_1 = (40, t + 3, EUR)$, $A_2 = (-100, t + 5, USD)$.

Sono inoltre disponibili i seguenti dati di mercato, validi al tempo t .

	USD	GBP	EUR
USD	1	0.8221	
GBP		1	1.2082
EUR			1

	USD	GBP	EUR
1	0.77	0.88	0.99
2	0.75	0.86	0.97
3	0.73	0.84	0.95
4	0.71	0.82	0.93
5	0.69	0.80	0.91

(Quante unità della divisa in colonna per una unità della divisa in riga)

(Fattori per scontare somme espresse in unità della divisa in colonna e maturanti tanti giorni da t quanti riportati in riga)

1. Completare la tabella relativa ai dati del mercato FX.
2. Calcolare $V_{P,t}$, il valore di P al tempo t nella base currency dell'investitore.

Inoltre, ipotizzando rendimenti semplici normali caratterizzati dai seguenti momenti

i	1	2
$E[R_i]$	-10	-5

$$Cov \begin{bmatrix} R_{1,t,h} \\ R_{2,t,h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(h-t)/100 & -(h-t)/100 \\ -(h-t)/100 & 4(h-t)/100 \end{bmatrix}$$

Determinare quanto segue.

3. Valore atteso e varianza dei rendimenti semplici di P .
4. Per $h = t + 3$, la distribuzione della variabile $R_{P,t,h}$.
5. La probabilità che il portafoglio P abbia un rendimento maggiore di -7 quando $h - t = 90$.
6. La probabilità di osservare un profitto (positivo) per $t = h - 6$.
7. Calcolare il Valore a Rischio di P al tempo t per $\alpha = 0.06$, $h = t + 2$, base currency dell'investitore.

Esercizio 7

Sull'orizzonte $[t, h]$, sia $r_{EUR/USD}$ il log-rendimento del tasso di cambio EUR/USD e $r_{EUR,4}$ il log-rendimento sul fattore di sconto $D_{EUR}(4)$. Si ipotizzi che valga la seguente identità:

$$\text{Cov} \left(\begin{bmatrix} r_{EUR/USD} \\ r_{EUR,4} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2(h-t) & -(h-t) \\ -(h-t) & (h-t) \end{bmatrix}.$$

Determinare:

1. La deviazione standard di $r_{USD/EUR}$ per $h = t + 5$.
2. La covarianza tra $r_{USD/EUR}$ e $r_{EUR,4}$ per $h = t + 2$.
3. La correlazione tra $r_{USD/EUR}$ e $r_{EUR,4}$.

Esercizio 8

Un asset A ha rendimenti semplici sull'intervallo $[t, h]$ che seguono una distribuzione normale di parametri $\mu = -2$ e $\sigma^2 = 9$. Calcolare varianza e valore atteso del prezzo al tempo h sapendo che il prezzo al tempo t è stato pari a $5/3$.

Esercizio 9

Un asset A ha log-rendimenti sull'intervallo $[t, h]$ che seguono una distribuzione normale di parametri $\mu = 1/3$ e $\sigma^2 = 4$. Calcolare varianza e valore atteso del prezzo al tempo h sapendo che il prezzo al tempo t è stato pari a $1/5$.

Esercizio 10

Le perdite v tra t e h di un portafoglio P seguono una distribuzione normale di parametri $\mu_v = -2$ e $\sigma_v^2 = 9(h-t)$. Calcolare il Valore a Rischio di P per $\alpha = .12$ e $h = t + 100$.

Esercizio 11

Le perdite v tra t e h di un portafoglio P ed una variabile casuale X sono legate dalla seguente relazione: $X = -5v + 2$. Calcolare il Valore a Rischio di P per $\alpha = .18$ sapendo che X segue una distribuzione normale di parametri $\mu_X = -1$ e $\sigma_X^2 = 9$.